

University of Groningen

Singular Value Analysis and Balanced Realizations of Nonlinear Systems

Fujimoto, Kenji; Scherpen, Jacquélien M.A.

Published in:
Measurement and Control

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:
2003

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Fujimoto, K., & Scherpen, J. M. A. (2003). Singular Value Analysis and Balanced Realizations of Nonlinear Systems. *Measurement and Control*, 42(10), 814-820.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

非線形系の特異値解析と平衡実現

藤 本 健 治*・Jacqueliën M.A. SCHERPEN**

* 京都大学 情報学研究科 京都府宇治市五ヶ庄

* Kyoto University, Graduate School of Informatics, Uji, Kyoto, Japan

** Delft University of Technology, Delft, The Netherlands

* E-mail: fuji@robot.kuass.kyoto-u.ac.jp

キーワード：非線形制御 (nonlinear control), 平衡実現 (balanced realization), モデル低次元化 (model reduction).

JL 0010/03/4210-0814 © 2003 SICE

1. はじめに

実世界に存在する対象の多くが非線形のふるまいをする系であるのに対して、従来はこれを近似して線形のモデルを構成することにより、線形の制御理論を適用していた。しかしより高精度な制御を行ったり、より複雑な制御対象を扱いたいという要求から、近年非線形の対象は非線形のまま制御しようという非線形制御理論が注目を集めてきている。本特集号の解説記事にもあるように、実際にさまざまな非線形制御法が構築されつつあるが、これらの制御法を実際の制御対象に適用する際には、モデルおよび補償器はどんどん複雑になる。このような場合に重要になるのが平衡実現やモデル低次元化の技術である。たとえば、与えられた制御対象が複雑すぎて設計が困難な場合や、補償器は設計できたけれども実機に実装するにはその計算量が多すぎるような場合には、一般に制御対象や補償器を低次元化してやることで計算量を抑制することが期待できる。また制御系設計の際の計算の側面だけをとってみても、平衡実現を用いることによって数値的に安定な設計を行えることが知られている。このように非線形系の平衡実現は重要な問題であり、非線形制御の今後の発展において基礎的な土台となるものである。

線形制御理論における平衡実現¹⁾とは、制御対象の入力から内部状態までの関係を表わす可制御性グラミアンと呼ばれる行列と、内部状態から出力までの関係を表わす可観測性グラミアンと呼ばれる行列が、互いに等しくなるような状態空間実現である。この実現を用いることで、数値的に扱いやすい状態空間実現が得られるだけでなく、内部状態が入出力関係にどれくらい寄与しているかを見通しよく計ることができる。したがって入出力への寄与が大きい状態とそれに関連するダイナミクスだけを取り出すことでモデル低次元化²⁾やシステム同定³⁾が行える。このように平衡実現は応用上も重要であるのだが、システム理論的にも非常に興味深いものである。実際、非線形系の平衡実現の研究から非線形系のハンケル作用素⁴⁾、随伴作用素^{4)~6)}、特異値解析⁷⁾など興味深い派生物も得られ、その奥行きは想像以上に深い。

非線形系の平衡実現の研究は、筆者の1人である Scherpen の研究⁸⁾にはじまる。この結果では、上にも述べた可

制御性グラミアンと可観測性グラミアンを非線形系に一般化したものとして可制御性関数および可観測性関数と呼ばれるスカラ関数を導入し、これらの関係を平衡させることで非線形系の平衡実現を得ようとした。この結果以降、可観測性関数のさらなる一般化⁹⁾、最小実現との関係¹⁰⁾などの結果が報告されている。しかし実はここで基礎となっている結果⁸⁾では、平衡実現は唯一には定まらず、たとえばこの実現に基づいてモデル低次元化を行おうとしても一意的な低次元モデルは得られないなどの問題があることが報告された¹¹⁾。その後、この流れとは少し違った方向性としてはじまった非線形ハンケル作用素の特異値構造の解析⁷⁾が結果として一意的でかつ精密な平衡実現を与えるものになる^{12)~14)}。またこの新たな平衡実現を用いると、可制御性、可観測性、ハンケルノルムなど制御対象の重要な性質を保存したモデル低次元化が可能になることも近年わかった^{13), 14)}。本解説では、これらの非線形系の平衡実現の一連の研究をできるだけ簡潔に解説したい。なおこの分野では、これらの研究以外にも、離散時間系の平衡実現^{15)~17)}、非線形系の経験的低次元化¹⁸⁾、近似平衡実現に基づく低次元化¹⁹⁾、平衡実現の数値計算法²⁰⁾、力学系の形や性質を保存したモデル低次元化²¹⁾なども報告されていることも付け加えておく。

2. 線形系の平衡実現

ここでは非線形系の考察の準備のために、線形系の平衡実現とモデル低次元化(平衡化打切法)の手順を簡単にまとめておこう。詳しくは教科書^{22), 23)}などを参照してほしい。まず制御対象としてつぎのような安定な線形系を考える。

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x(0) = 0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

ただし $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ などである。この系の可制御性グラミアン P および可観測性グラミアン Q はつぎのリアプノフ方程式の解として与えられる対称行列である。

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (2)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \quad (3)$$

よく知られるように P, Q の正定性がそれぞれ (1) 式の系の可制御性, 可観測性と等価である. さらに P, Q そのものが可制御性, 可観測性の定量的な指標にもなっており, それぞれ入力から状態への影響の程度および状態から出力への影響の程度をあらわしている. この P と Q が等しくかつ対角に

$$P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (4)$$

($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$) のようになる状態空間実現のことを平衡実現と呼び, 入力-状態間の関係と状態-出力間の関係とが等しくかつ各状態の要素ごとに分離 (対角化) された状態空間である. このグラミアンの対角要素 σ_i をハンケル特異値と呼ぶ. したがってたとえばある k に対して $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$ であれば, 状態 x_k の方が x_{k+1} よりも入出力に与える影響がかなり大きいと考えられるため, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ のダイナミクスを切り取ることで系の重要な部分だけを切り出すようなモデル低次元化が行える. この手法を平衡化打ち切り法と呼ぶ.

さらに線形系の場合のハンケル作用素についてもふれておこう. まず (1) 式の線形系の可制御性作用素 C および可観測性作用素 O を定義しよう. これらは次式によって与えられる入力から状態, および状態から出力までの写像である.

$$C: u \mapsto x^0 := \int_0^\infty e^{\tau A} B u(\tau) d\tau$$

$$O: x^0 \mapsto y := C e^{tA} x^0$$

ハンケル作用素 \mathcal{H} はこれらの合成写像として与えられる.

$$\mathcal{H} = O \circ C \quad (5)$$

これらの作用素とグラミアンの間には深いつながりがあり,

$$P = C \circ C^*, \quad Q = O^* \circ O \quad (6)$$

が成立する. つまり P, Q はそれぞれ C^*, O を二乗したような形になっている. またこのことからつぎの重要な性質が導かれる.

定理 1 ²³⁾ グラミアンの積 PQ の零でない固有値の組とハンケル作用素 \mathcal{H} の零でない特異値の 2 乗の組は等しい.

この結果ゆえに (4) 式の σ_i はハンケル特異値と呼ばれるわけである. また (1) 式の線形系のハンケルノルム $\|\Sigma\|_H$ は, 次式のようにそのハンケル作用素の L_2 ゲインとして定義される.

$$\|\Sigma\|_H := \sup_{\substack{u \in L_2(0, \infty) \\ u \neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} = \sigma_1 \quad (7)$$

3. 非線形系のハンケル作用素

ここでは前節の線形系に対する平衡実現の枠組をいかに非線形系に拡張するかについて説明する. まず制御対象となる非線形系は簡単のために入力にアファインで漸近安定なつぎのような系を考えよう.

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & x(0) = x^0 \\ y = h(x) \end{cases} \quad (8)$$

この系に対して可制御性作用素 C と可観測性作用素 O はつぎのように定義される.

$$C: u \mapsto x^0: \begin{cases} \dot{x} = -f(x) - g(x)u & x(\infty) = 0 \\ x^0 = x(0) \end{cases}$$

$$O: x^0 \mapsto y: \begin{cases} \dot{x} = f(x) & x(0) = x^0 \\ y = h(x) \end{cases}$$

上の定義を見ればわかるように, 可観測性作用素 O は入力零の系において初期状態 $x(0) = x^0$ から導かれる出力 y への写像を表わす. 可制御性作用素 C の意味あいはいささわかりにくいので上の式を時間反転した表現を考えて,

$$C: u \mapsto x^0: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(-t) & x(-\infty) = 0 \\ x^0 = x(0) \end{cases}$$

と書くと, 状態 $x(-\infty) = 0$ の系に対して入力として u を時間反転した信号を与えたときに時刻 0 での値 $x(0) = x^0$ を返す作用素になっている. したがって線形の場合のグラミアンと同様に C は入力から状態までの写像を, O は状態から出力までの写像を表わすものである. これらの作用素を用いて (8) 式の非線形系のハンケル作用素 \mathcal{H} は線形と同じ (5) 式で与えられる.

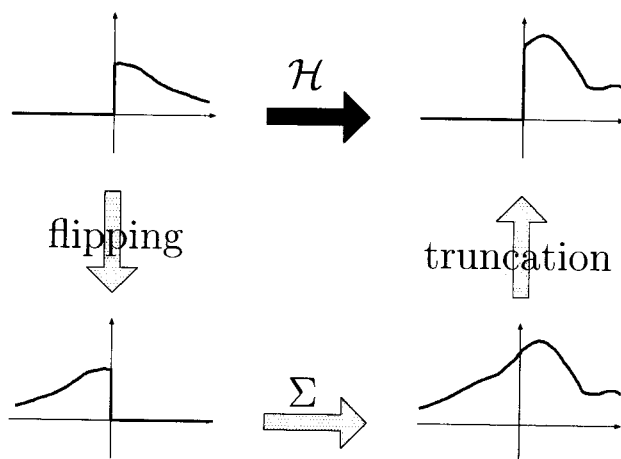


図1 Σ のハンケル作用素 \mathcal{H}

このハンケル作用素の入出力写像は, 図1のように表わされる. まず図の左上の $L_2(0, \infty)$ の信号を時間反転 (flipping) して左下の $L_2(-\infty, 0)$ を作る. (8) 式の制御対象 Σ

にこの信号を作用させて右下の信号が得られる。最後に時刻 $(0, \infty)$ の区間だけを切り取って (truncation) 右上の信号を得る。図の左上の信号から右上の信号までの写像がハンケル作用素である。この図および定義式 (5) からわかるように、ハンケル作用素は、時刻零での状態 $x(0)$ を介して得られるもとの系 Σ の入出力の関係を表わしている。したがってこのハンケル作用素の挙動を解析することで、制御対象の状態が入出力へ与える影響を計ることができるのである。

またこれらに関連する作用素や関数をいくつか定義しておかなくてはならない。まず可制御性作用素 \mathcal{C} の (ノルム最小化型の) 擬逆作用素を \mathcal{C}^\dagger で表わす。すなわち、

$$\mathcal{C}^\dagger : x^0 \mapsto u := \arg \inf_{\mathcal{C}(u)=x^0} \|u\|$$

この \mathcal{C}^\dagger および \mathcal{O} を用いて線形系の場合のグラミアンを非線形系に拡張したものである可制御性関数 $L_c(x)$ および可観測性関数 $L_o(x)$ が得られる。

$$L_c(x^0) := \frac{1}{2} \|\mathcal{C}^\dagger(x^0)\|^2 \quad (9)$$

$$L_o(x^0) := \frac{1}{2} \|\mathcal{O}(x^0)\|^2 \quad (10)$$

ここで \mathcal{C}^\dagger と \mathcal{O} の役割を思い出すと、 $L_c(x^0)$ は (8) 式の系において状態 $x(-\infty) = 0$ を $x(0) = x^0$ にもってゆくための最小の入力 u のエネルギーを、また $L_o(x^0)$ は入力零の系において $x(0) = x^0$ から得られる出力 y のエネルギーをそれぞれ表わしていると考えられる。もし対象としている系 Σ が (1) 式のような線形系であったなら、 L_c, L_o はそれぞれ以下になる^(注1)。

$$L_c(x) = \frac{1}{2} x^T P^{-1} x, \quad L_o(x) = \frac{1}{2} x^T Q x \quad (11)$$

また非線形の場合に L_c や L_o を求めるには、線形の場合のリアプノフ方程式 (2), (3) の代わりに、次式のハミルトン-ヤコビ方程式を解かねばならない。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L_o(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) &= 0 \end{aligned}$$

ただし $\dot{x} = -(f + g g^T (\partial L_c / \partial x)^T)$ が漸近安定になるような L_c (安定化解) でなくてはならない。

線形系におけるグラミアンと同様に、この可制御性関数と可観測性関数の正定性はそれぞれ制御系 (8) の強可接近性および零可観測性⁽²⁴⁾ と呼ばれるある種の可制御性と可観測性に関連している。両方の性質をあわせることで、つぎの結果が得られる。

(注1) ここで L_c に P^{-1} が現れるのは、(9) 式において \mathcal{C} ではなく \mathcal{C}^\dagger を用いていることによる。(6) 式も参照。

定理 2⁽¹⁰⁾ 任意の $x \neq 0$ に対して $0 < L_c(x) < \infty$, $0 < L_o(x) < \infty$ ならば、その状態空間実現 (8) 式は最小実現⁽²⁵⁾ である。

このように非線形の場合は L_c, L_o が系の性質を表わす重要な指標になっている。さらに (11) 式におけるグラミアンと可制御性関数、可観測性関数の関係から、つぎのような平衡実現の基礎となる結果が得られている。

定理 3⁽⁸⁾ (8) 式の線形近似系が非零で互いに異なるハンケル特異値をもつとする。このとき局所的にある座標変換 $x = \Phi(z)$ が存在して、座標 z 上で可制御性関数 $L_c(\Phi(z))$ 、可観測性関数 $L_o(\Phi(z))$ は次式ようになる。

$$L_c(\Phi(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (12)$$

$$L_o(\Phi(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \tau_i(z) \quad (13)$$

ただし $\tau_1(z) \geq \tau_2(z) \geq \dots \geq \tau_n(z)$ である。

この状態空間実現を入力正規形、関数 $\tau_i(z)$ を特異値関数とよぶ。(11) 式によってグラミアンと可制御性関数、可観測性関数を対応させれば、入力正規形は

$$P = I, \quad Q = \text{diag}(\tau_1(z), \tau_2(z), \dots, \tau_n(z)) \quad (14)$$

に対応していることがわかる。値の大きな特異値関数 τ_i に対応する状態 x_i は入出力に与える影響が大きいといえる。このように入力正規形は、線形の平衡実現に非常に近い形をしているのだが、いくつか問題点ももっている。(a) このような実現および特異値関数は一意的には定まらず、また (b) 線形の場合のように $P = Q$ になるような状態空間実現は得られていない、などである。とくに (a) に関しては、たとえば系の次元が $n = 2$ で

$$L_c(z) = \frac{1}{2} (z_1^2 \tau_1(z) + z_2^2 \tau_2(z)) = \frac{1}{2} (2z_1^2 + z_2^2 + z_1^2 z_2^2)$$

のような関数である場合には

$$\tau_1(z) = 2 + k z_2^2, \quad \tau_2(z) = 1 + (1 - k) z_1^2$$

のように任意の定数 k を用いて特異値関数を幾通りにも選ぶことができる。このことから (12), (13) 式の入力正規形ではもともと系の本質的な性質を規定できていないことがわかる。

ここまでの議論は基本的に (4) 式のようにグラミアンをどうにか対角化するという方針で平衡実現を得ようとしてきた。しかしハンケル特異値 σ_i の本質的な部分は、グラミアン P, Q の固有値というよりはハンケル作用素 \mathcal{H} の特異値になっている点にある。したがって次章では少し話を戻して、そもそも非線形系の特異値とはどういうものなのかという問題から考察し直してみよう。

4. 非線形系の特異値解析

2章では、ハンケル作用素の特異値が平衡実現において重要な役割を果たすことを見た。ここではこの特異値というものが非線形系においてはどのような役割を果たすものなのかを調べてみよう。まずハンケル作用素とは少しはなれて、一般の滑らかな非線形の作用素 $T: U \rightarrow Y$ を考えよう。ただし U と Y はヒルベルト空間とする。もしこの作用素 T が線形ならば、

$$T^* \circ T(v) = \sigma^2 v \quad (15)$$

を満たす σ (すなわち T^*T の固有値の平方根) を T の特異値と呼び、対応する v を特異ベクトルと呼ぶ。ここで T^* は T の随伴作用素と呼ばれ、任意の $u \in U, y \in Y$ に対して

$$\langle y, T(u) \rangle = \langle T^*(y), u \rangle$$

を満たす作用素である。特異値解析が重要なのは、その最大のもの (最大特異値 σ_{\max}) が作用素 T のゲインを特徴づけるため、対応する特異ベクトル v_{\max} は入出力比を最大化する入力となる。つまりつぎが成立する

$$\sigma_{\max} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|}, \quad v_{\max} = \arg \sup_{u \neq 0} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \quad (16)$$

この特異値の構造は本質的に作用素の線形性に依存した性質であるのだが、(16) 式のような T のゲインの構造に注目して非線形の場合に拡張することを考えよう。ここで非線形系のゲインというのは、(16) 式のようにすべての入力の中での最大値を考えるのではなく、

$$\sigma_{\max}^c = \sup_{\|u\|=c} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|}, \quad v_{\max}^c = \arg \sup_{\|u\|=c} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \quad (17)$$

というように、入力の大きさ $c > 0$ に応じて最大のゲインを決めてやるほうが自然である^(注2)。また σ_{\max}^c がわかれば、

$$\sigma_{\max} = \sup_{c>0} \sigma_{\max}^c$$

で σ_{\max} や v_{\max} をすぐに計算でき、線形の場合にはそもそも σ_{\max} と σ_{\max}^c が一致する。

では T が非線形の場合に (17) 式のような関係式を満たす σ や v を (15) のような形の関係式で特徴づけるにはどうすればよいだろうか？ まず簡単であるがここではその微分を考えてみる。たとえば T が $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の写像である場合を図 2 に表わしてみた。図の入出力比が最大 (極大) になっている点 $u = u^*$ では、「入出力比」の微分が零になっ

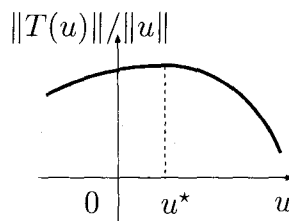


図 2 $\|T(u)\|/\|u\|$ を最大にする入力 $u = u^*$

ているはずである。このことは、より一般の T でも成立し、 $\|u\| = c$ を満たす範囲の u に対して

$$d \left(\frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \right) (du) = 0$$

が成立するはず^(注3)、ということになる。簡単な計算から上式は

$$\langle (dT(u))^* \circ T(u) - \frac{\|T(u)\|^2}{\|u\|^2} u, du \rangle = 0 \quad (18)$$

と等価となる。また拘束式 $\|u\| = c$ を微分すると

$$\langle u, du \rangle = 0 \quad (19)$$

であるので、結局求める入力 $u = v$ に対する 1 つの必要条件は (19) 式を満たすすべての微小変化 du に対して (18) 式が成立すればよい。ため、適当なスカラー λ を用いて

$$(dT(v))^* \circ T(v) = \lambda v \quad (20)$$

と表わせる。ここでこのままでは σ に対する条件がなくなってしまうので、(17) を満たすように v から σ をつぎのように定めておく。

$$\sigma = \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \quad (21)$$

以下では (20), (21) 式を特異値解析の方程式と呼び、これらを満たす v, σ をそれぞれ T の特異ベクトルおよび特異値と呼ぶことにする。とくに (16) 式の解は、(20) 式の解のうちさらに $\lambda = \sigma^2$ を満たすものになっている。また T が線形の場合には (20) 式で $\lambda = \sigma^2$ が常に成立し、(15) 式と一致することがわかるだろう。

たとえば T を通常の状態空間実現 (8) をもつ非線形系とし、信号空間を L_2 空間とする。このとき特異値解析の方程式 (20) において $\lambda = \sigma^2$ としたものは、あるハミルトン系のダイナミクスを表わし、その解を求めるためのハミルトンヤコビ方程式を計算すると T の L_2 ゲインが σ となるような非線形 H_∞ 問題のハミルトンヤコビ方程式²⁷⁾ に一致する。このように非線形系の特異値解析 (20), (21) 式

(注2) たとえば ISS (Input-to-State Stability) の枠組みでは、通常入力の大きさに依存するゲインが用いられる²⁶⁾。

(注3) 本稿での微分は Fréchet 微分を用いる。写像 T の Fréchet 微分とは各 u に対して $T(u+v) = T(u) + dT(u)(v) + o(\|v\|)$ を満たす v に関して線形な写像 dT のことをいう。

は、線形系の場合 (15) 式の自然な拡張になっている様子がわかる。

このように入出力の関係から特異値をとらえ直すことによって、線形の場合の特異値構造を非線形に一般化できる。以下では非線形のハンケル作用素の特異値解析を行うことによって、平衡実現などのツールがそのままの形で非線形系に適用できるようになる様子を示す。

5. 非線形ハンケル作用素の特異値解析と平衡実現

ここでは前章の方法を用いて、(8) 式の非線形系のハンケル作用素 \mathcal{H} の特異値解析を行ってみよう。特異値解析の方程式 (20) 式はつぎようになる。

$$(d\mathcal{H}(v))^* \circ \mathcal{H}(v) = \lambda v$$

ハンケル作用素は信号空間として L_2 空間を考えているので、結果として前章で述べた通常非線形系の L_2 ゲイン解析の場合と同じように、上式はある種のハミルトン系のダイナミクスを表わすものとなる。このハミルトン系の挙動を解析することでつぎのような結果が得られる。

定理 4 $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\xi \in \mathbb{R}^n$ が

$$dL_o(\xi) = \lambda dL_c(\xi) \quad (22)$$

を満たすとする、 $v := C^+(\xi)$ と λ は (20) 式を満たす。すなわち v はハンケル作用素 \mathcal{H} の特異ベクトルとなる。

ハンケル作用素 \mathcal{H} の特異値解析の方程式 (20) が基本的に L_2 信号に関する方程式であり、通常これを解くには非線形の微分方程式の解を計算しなくてはならない。しかし上の定理は、実はその解 (の少なくとも一部) が状態空間上の代数的な方程式 (22) を解くことで得られることを示している。

線形系 (1) の場合を思い出してみよう。線形の場合には L_c, L_o が (11) 式のように表わせるため、定理の (22) 式は

$$\xi^T Q = \lambda \xi^T P^{-1}$$

すなわち、

$$PQ\xi = \lambda\xi$$

であり、 λ は PQ の固有値、 ξ はその固有ベクトルとなる。つまり定理 4 は定理 1 を非線形へ一般化したものといえる。さらに線形の場合にはこの固有ベクトル ξ が平衡実現の座標軸の役割を果たしていることから、(22) 式の解が重要な役割を果たすことがわかる。

線形の場合には、行列 PQ に n 組の固有値と固有ベクトルが存在することが自明であったが、非線形系の場合はどうだろうか？ この疑問の答えはつぎの定理で与えられる。

定理 5 γ (8) 式の線形近似系のハンケル特異値が非零ですべて異なるとする。このとき (22) 式は原点近傍で、互いに原点で交わる n 本の異なる解曲線 $\xi = \xi_i(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ をもつ。

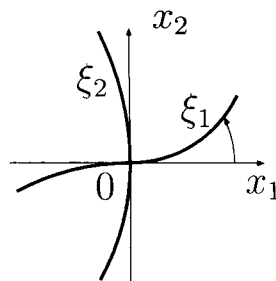


図3 解曲線 ξ_i

線形の場合には、(22) 式の解は原点を通る n 本の直線 (固有ベクトルを含む直線) であったが、上の定理は非線形の場合にも同様な n 本の「曲線」が存在することを示している。たとえば系の次元が $n = 2$ の場合、図3のような原点を通る曲線が (22) 式の解になるわけである。線形の場合を考えれば、この解曲線 $x = \xi_i(s)$ が非線形の平衡実現の座標軸になることが暗示される。実際、解曲線 $x = \xi_i(s)$ を新たな座標軸になるように座標変換し、さらに座標 ξ_i のいくつかで張られる任意の低次の部分空間上でも同様の座標変換を施してやることで、最終的に

$$\frac{\partial L_o(z)}{\partial z_i} = 0 \iff \frac{\partial L_c(z)}{\partial z_i} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{L_o(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)}{L_c(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)} = \sigma_i(s)^2 \quad (24)$$

となるような座標変換 $x = \Phi(z)$ が構成できる¹²⁾。上式において各座標軸 z_i が定理 4 の (22) 式の条件を満たす解であることが確認できる。しかも (24) 式が意味することは、 L_c と L_o の比が各座標軸 z_i 上でハンケル作用素の ($\xi_i(s)$ に対応する) 特異値 $\sigma_i(s)$ の 2 乗に一致するというのである。この性質はやはり (4) 式で表わされる線形系の平衡実現の性質の 1 つの一般化になっている。

さてここまで来ればあともうひといきである。ここからは少々議論の飛躍があるが、(23), (24) 式の状態空間実現を元にさらに微分位相幾何のツール^{28), 29)} をいくつか用いると最終的につぎのような実現が得られる。

定理 6 ¹⁴⁾ 定理 5 の仮定のもとで、局所的にある座標変換 $x = \Phi(z)$ が存在して、座標 z 上で L_c および L_o はつぎのようになる。

$$L_c(\Phi(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{\sigma_i(z_i)}$$

$$L_o(\Phi(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_i(z_i)$$

また簡単に確認できるように (23), (24) 式の性質はそのまま保たれていることから, 上の定理は各軸上での (24) 式の性質をそのまま状態空間全体に広げた結果であるということが出来る. この実現は (11) 式によってグラミアンに対応させると

$$P = Q = \text{diag}(\sigma_1(z_1), \sigma_2(z_2), \dots, \sigma_n(z_n))$$

のようになっており, 線形の場合の (4) 式の自然な拡張になっている様子がわかる. さらにこの実現はほぼ一意的に定まり, $\sigma_i(z_i)$ 自身はハンケル作用素 \mathcal{H} の特異値そのものなので, やはり入出力から一意的に定まる量である. また上式から明らかなように, 入力-状態と状態-出力の間の平衡実現もなされている. すなわち定理 3 のあとで述べた問題点 (a), (b) を同時に解決できる実現となっている. この状態空間実現を非線形系 (8) の平衡実現と呼ぶ.

6. モデル低次元化

最後に定理 6 で得られた平衡実現の重要な応用例として平衡化打切法によるモデル低次元化を簡単に紹介しておく. まず非線形系のハンケルノルムを定義しておく. これは線形の場合の (7) 式と同様に

$$\|\Sigma\|_H := \sup_{\substack{u \in L_2(0, \infty) \\ u \neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} = \sup_{z_1 \in \mathbb{R}} \sigma_1(z_1)$$

で与えられる. (2 つ目の等号は σ_1 が大域的に定義されているときにのみ成立.) 以下では系のハンケルノルムをできるだけ保存するようなモデル低次元化について考察する.

いま (8) 式の非線形系を対象とするが, 簡単のためにすでに定理 6 の意味で平衡実現になっているものとしよう. さらにある k に対して $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$ が成立しているものとする. このとき線形の場合と同じように, 状態 $x^a := (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ は状態 $x^b := (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ よりも入出力に与える影響が大きいと考えられ, 状態 $x = (x^a, x^b)$ のうち x^a の部分を取り出すことで k 次元の低次元モデルが得られる. この手順をもう少し詳しく書くと, $x = (x^a, x^b)$ の分割に対応させて (8) 式の f と g を $f(x) = (f^a(x), f^b(x))$, $g(x) = (g^a(x)^T, g^b(x)^T)^T$ のように分解して表わすことで, 状態空間 x^a, x^b に対応する低次元モデルがそれぞれつぎのように得られる.

$$\Sigma^a : \begin{cases} \dot{x}^a &= f^a(x^a, 0) + g^a(x^a, 0)u^a \\ y^a &= h(x^a, 0) \end{cases} \quad (25)$$

$$\Sigma^b : \begin{cases} \dot{x}^b &= f^b(0, x^b) + g^b(0, x^b)u^b \\ y^b &= h(0, x^b) \end{cases} \quad (26)$$

この手順を非線形系 (8) の平衡化打切法とよぶ. このようにして得られる低次元モデルに対して以下の性質が成り立つ.

定理 7 ¹³⁾ 低次元モデル Σ^a, Σ^b の可制御性関数 L_c^a, L_c^b , 可観測性関数 L_o^a, L_o^b , ハンケル作用素の特異値 σ_i^a, σ_i^b , はつぎのように Σ の関数から計算できる.

$$\begin{aligned} L_c^a(x^a) &= L_c(x^a, 0), & L_o^a(x^a) &= L_o(x^a, 0) \\ L_c^b(x^b) &= L_c(0, x^b), & L_o^b(x^b) &= L_o(0, x^b) \\ \sigma_i^a(x_i^a) &= \sigma_i(x_i^a), & i &= 1, 2, \dots, k \\ \sigma_i^b(x_i^b) &= \sigma_{i+k}(x_i^b), & i &= 1, 2, \dots, n-k \end{aligned}$$

とくに関数 σ_1 が大域的に定義されているときには, 次式が成立する.

$$\|\Sigma^a\|_H = \|\Sigma\|_H$$

定理 7 では, 定理 6 の平衡実現に対して (25) 式のように部分的なモデルを切り出すだけで, 元の系の可制御性関数, 可観測性関数やハンケル作用素の特異値などが保存されることを示している. このことと定理 2 より元の系の可制御性や可観測性がそのまま低次元のモデルに引き継がれ, さらにハンケルノルムの意味で元の系のある種の定量的な性質も保存することになる. この定理 7 の性質自体は, (23), (24) 式を満たす実現であれば同様に成立する¹³⁾ ことにも注意しておく. また系の安定性に関しては, 局所的な漸近安定性 (およびある条件のもとでは大域的なりアプノフ安定性) が低次元モデルにも引き継がれることが知られている. このように非線形系に対しても, 線形の場合とほぼ同様なモデル低次元化の枠組みが得られている.

ただし線形の場合とは異なり, もしもとの系 (8) が多項式などの比較的簡単な関数で記述されている場合に, 低次元モデルはより複雑な関数を含むものとなり, 計算量の観点からは好ましくないモデルが得られる場合も起こりうる. しかし本手法を実際に使うときには, 一般的な非線形設計手法と同様にテイラー展開などを併用して非線形関数を近似することが普通であり, 個々の非線形関数の計算量は通常は問題にならない.

7. おわりに

本稿では, 非線形系の平衡実現とそれに関連するモデル低次元化や特異値解析などの手法について解説した. 筆者の感覚では, この分野の研究はその重要性に比べていまだ整備の遅れている分野であるという認識をもっている. 大規模で複雑な制御対象を扱う場合には, 制御対象が線形の場合でさえ平衡実現とその関連手法は必要不可欠であり, 非線形の制御対象ならなおさらである. しかし現状はようやくその基礎の部分の結果が得られたにすぎない.

本稿で紹介した手法を実用に耐えるものにするためには, いまだ多くの課題が残されている. そのうち具体的なものとしては, (a) 平衡実現の具体的な計算法の研究^{12), 20)}, (b) 平衡化打切法における近似誤差の上界, (c) 最適ハンケルノルムモデル低次元化, (d) 離散時間系への適用^{15)~17)}, (e) システム同定³⁾ との関連, などあげればきりが無い. 多くの研究者のこの分野への参加を期待したい.

(2003 年 7 月 21 日受付)

参考文献

- 1) B. C. Moore : Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **AC-26**, 17/32 (1981)
- 2) K. Glover : All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds, *Int. J. Control*, **39**, 1115/1193 (1984)
- 3) M. Verhaegen and P. Dewilde : Subspace model identification part 1: The output-error state-space model identification class of algorithms, *Int. J. Control*, **56-5**, 1187/1210 (1992)
- 4) J. M. A. Scherpen and W. S. Gray : Nonlinear Hilbert adjoints: Properties and applications to Hankel singular value analysis, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **51-5**, 883/901 (2002)
- 5) J. Batt : Nonlinear compact mappings and their adjoints, *Math. Ann.*, **189**, 5/25 (1970)
- 6) K. Fujimoto, J. M. A. Scherpen and W. S. Gray : Hamiltonian realizations of nonlinear adjoint operators, *Automatica*, **38-10**, 1769/1775 (2002)
- 7) K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen : Eigenstructure of nonlinear Hankel operators, *Nonlinear Control in the Year 2000* (Eds. by A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarigue and W. Respondek), Vol. 258 of *Lecture Notes on Control and Information Science*, Springer-Verlag, Paris, 385/398 (2000)
- 8) J. M. A. Scherpen : Balancing for nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, **21**, 143/153 (1993)
- 9) W. S. Gray and J. P. Mesko : Observability functions for linear and nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, **38**, 99/113 (1999)
- 10) J. M. A. Scherpen and W. S. Gray : Minimality and local state decompositions of a nonlinear state space realization using energy functions, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **AC-45-11**, 2079/2086 (2000)
- 11) W. S. Gray and J. M. A. Scherpen : On the nonuniqueness of balanced nonlinear realizations, *Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control*, 729/734 (1999)
- 12) K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen : Nonlinear input-normal realizations based on the differential eigenstructure of Hankel operators, Accepted for *IEEE Trans. Automatic Control* (2003)
- 13) K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen : Balancing and model reduction for nonlinear systems based on the differential eigenstructure of Hankel operators, *Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, 3252/3257 (2001)
- 14) K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen : Nonlinear balanced realization based on singular value analysis of Hankel operators, To appear in *Proceeding of IEEE CDC'03* (2003)
- 15) E. I. Verriest and W. S. Gray : Discrete-time nonlinear balancing, *Proc. 5th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems*, 515/520 (2001)
- 16) R. Lopezlena and J. M. A. Scherpen : Energy functions and balancing for nonlinear discrete-time systems, *Proc. of IFAC World Congress*, 659/664 (2002)
- 17) K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen : Singular value analysis of Hankel operators for general nonlinear systems, *Proc. in European Control Conference* (2003)
- 18) J. Hahn and T. F. Edgar : An improved method for nonlinear model reduction using balancing of empirical gramians, *Comp. Chem. Eng.*, **26-10**, 1379/1397 (2002)
- 19) S. Lall, J. E. Marsden and G. Glavaski : A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear systems, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, **12-6**, 519/535 (2002)

- 20) A. Newman and P. S. Krishnaprasad : Computing balanced realizations for nonlinear systems, *Proc. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems* (2000)
- 21) R. Lopezlena, J. M. A. Scherpen and K. Fujimoto : Energy-storage balanced reduction of port Hamiltonian systems, *Proc. IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, 79/84 (2003)
- 22) 大日向, アンダーソン : 制御システム設計 -コントローラの低次元化, 朝倉書店 (1999)
- 23) K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover : *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J. (1996)
- 24) H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft : *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York (1990)
- 25) A. Isidori : *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, third edition (1995)
- 26) Z. P. Jiang, A. R. Teel and L. Praly : Small-gain theorem for ISS systems and applications, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **7**, 95/120 (1994)
- 27) 井村順一 : 非線形 H_∞ 制御 -線形系の H_∞ 制御は非線形系にどこまで拡張可能か-, 計測と制御, **34-3**, 188/195 (1995)
- 28) J. W. Milnor : *Morse Theory*, Annals of Math. Stud. 51, Princeton University Press, New Jersey (1963)
- 29) J. W. Milnor : *Topology from the Differential Viewpoint*, Princeton University Press, New Jersey (1965)

[著者紹介]

藤本 健治 君(正会員)



1994年京都大学工学部精密工学科卒業, 96年京都大学大学院工学研究科修士課程修了, 97年同大学院博士後期課程を中途退学。現在京都大学大学院情報学研究科助手。99年オーストラリア国立大学客員研究員, 99~2000年および02年デルフト工科大学客員研究員。非線形制御の研究に従事。00年度本会論文賞武田賞, 03年度本会制御部門大会賞を受賞。博士(情報学)。システム制御情報学会, IEEEの会員。

Jacqueline M.A. SCHERPEN 君



Jacqueline M.A. Scherpen received her M.Sc. and Ph.D. degree in Applied Mathematics from the University of Twente, The Netherlands, in 1990 and 1994, respectively. Currently, she is an associate professor of the Delft Center for Systems and Control of Delft University of Technology, The Netherlands. She has held visiting research positions at the

Universite de Compiegne, France, SUPELEC, Gif-sur-Yvette, France, the University of Tokyo, Japan and the Old Dominion University, VA, USA. Her research interests include nonlinear model reduction methods, realization theory, nonlinear control methods, with in particular modeling and control of physical systems with applications to electrical circuits. She is an Associate Editor of the IEEE Transactions on Automatic Control.